



FACULTAT DE MATEMÀTIQUES I ESTADÍSTICA  
LLICENCIATURA DE MATEMÀTIQUES

LLIÇÓ INAUGURAL DEL CURS 1994-95

Barcelona, 3 d'octubre de 1994

# MODELIZACION MATEMATICA

José Luis Andrés Yebra

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica

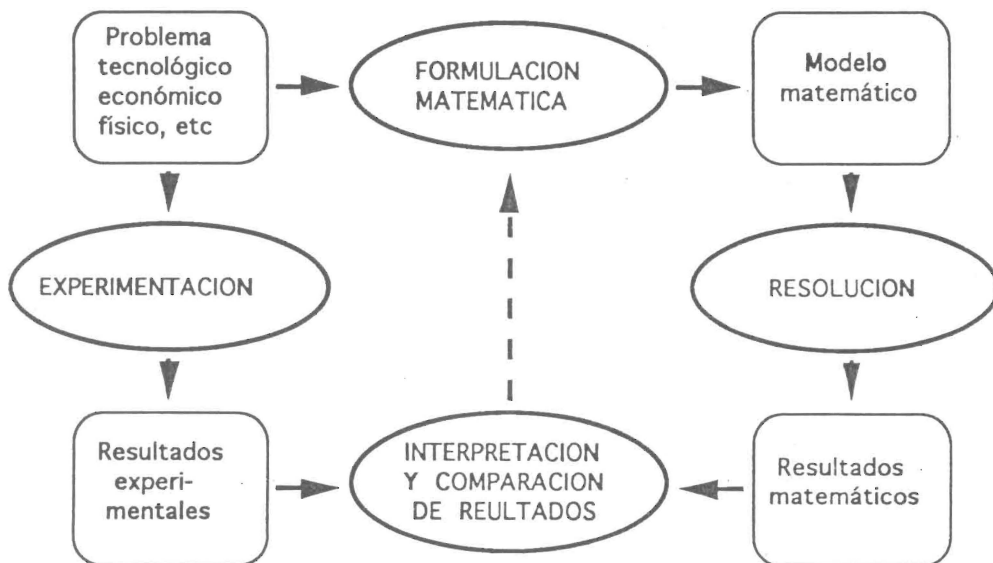
El curso 1993-94 comenzaba bajo los efectos de la impresión causada por el anuncio, en el mes de julio de 1993, de la demostración presentada por A. Wiles del *último teorema de Fermat* el cual afirma que la ecuación  $x^n + y^n = z^n$  no tiene soluciones en los enteros positivos para  $n > 2$ . Aunque hoy día el anuncio aún no se ha concretado en la publicación de la demostración, existen fundadas esperanzas de que lo será en un futuro próximo. En cualquier caso, se trata de uno de los escasos logros matemáticos de los que se llega a hacer eco la prensa no especializada, la cual no suele molestar a sus lectores narrando las ocurrencias y hallazgos de los matemáticos.

En este comienzo de curso la prensa ha dedicado importantes espacios a destacar la victoria de un programa informático de ajedrez, Genius 2, sobre el mejor jugador mundial, el azerbaiyano Gary Kasparov, a quien eliminó en el torneo Intel de Londres por el resultado de 1,5 a 0,5 (una victoria y un empate). Aunque se trataba de un torneo de partidas semirrápidas (25 minutos para cada jugador), se trata sin duda de un hito en el campo de la Inteligencia Artificial que seguramente no imaginaba L. Torres Quevedo cuando presentó en 1912 su Ajedrecista, la primera máquina de jugar al ajedrez, capaz de dar mate en un final de Rey y Torre contra Rey. Este acontecimiento se debe en parte a los continuos progresos en Microelectrónica y Arquitectura de Computadores, pero sobretudo a la mejora de los programas informáticos de los que Genius 2 sólo es un ejemplo. Si bien está lejos de ser alcanzado el principal objetivo declarado de la Inteligencia Artificial —conseguir que las máquinas imiten la forma de discurrir de los humanos—, en algunos de sus dominios de experimentación, como es el ajedrez, los actuales modelos incorporan cada vez un mayor número de técnicas propias de jugadores humanos: bibliotecas de aperturas, exploración de variantes a distintos niveles de profundidad, preselección de jugadas a estudiar, etc.

Este ejemplo de aproximación a una actividad entre lúdica y deportiva puede servir de introducción al tema del que quiero hablaros hoy: la Modelización Matemática.

## MODELIZACION MATEMATICA

La modelización matemática pretende describir la realidad en términos matemáticos, una tarea difícil y que, sin embargo, está jalonada de éxitos sorprendentes. El proceso de modelización matemática puede esquematizarse en el cuadro de la figura. A partir de un problema dado, de índole física, tecnológica, biológica, económica, etc., la primera etapa consiste en la *formulación matemática* del problema. Su objetivo es asociarle un modelo matemático que lo describa. Ello obliga a tener en cuenta únicamente una parte de las características que intervienen en el problema inicial y prescindir de otras que se consideran accesorias o incluso irrelevantes para su resolución. Hay que hacer hipótesis sobre la influencia de los diferentes factores que intervienen. Son elecciones difíciles y susceptibles de ser modificadas posteriormente. Para obtener el modelo matemático tenemos que conseguir traducir al lenguaje matemático las características seleccionadas. En el *modelo matemático* éstas aparecerán en la forma de variables, funciones, ecuaciones, etc. A continuación debemos *resolver* el problema matemático resultante para obtener *resultados* concretos, normalmente numéricos. Finalmente, hemos de *interpretar* estos resultados en relación con el problema inicial, comparándolos eventualmente con resultados experimentales. Si hay acuerdo entre ellos, podemos aceptar el modelo matemático como una representación del problema inicial que para nosotros es más cómoda y manejable. Además el modelo puede proporcionarnos información adicional que o no puede ser conseguida experimentalmente o lo sería a un coste muy elevado. Otra ventaja adicional es que el modelo matemático puede modelar otros problemas totalmente diferentes. Si, por el contrario, los resultados matemáticos no concuerdan con los experimentales, y supuesto que no hemos cometido errores en la resolución matemática, debemos volver a la primera etapa, es decir tenemos que revisar y corregir la formulación matemática del problema. Quizá sea necesario tener en cuenta factores cuyo efecto habíamos despreciado inicialmente. Y todo este proceso podría repetirse varias veces obteniéndose sucesivos modelos que describen el fenómeno estudiado cada vez con mayor exactitud.



Un ejemplo de este proceso lo proporcionan los modelos de población. Un primer modelo viene dado por la *ley de Maltus*, según la cual el incremento de población por unidad de tiempo es proporcional a la población existente, lo que lleva a que ésta crezca exponencialmente. Este crecimiento puede ser aceptado a corto plazo pero para periodos largos hace previsiones ridículas. Es más aceptable el modelo que utiliza la *ley logística*, en la que el ritmo de crecimiento se reduce a medida que aumenta la población y que lleva a la existencia de una población máxima. Otro ejemplo muy conocido es el paso de la mecánica clásica a la relativista. La primera es aceptable para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, pero para velocidades comparables con ésta la descripción correcta —con la experiencia actual y localmente— está dada por la mecánica relativista. En [4] se pueden encontrar abundantes ejemplos en otras áreas científicas.

Vamos a ver a continuación dos ejemplos concretos en el campo de las Tecnologías de la Información: el primero en el contexto de redes de interconexión y el segundo en el de tratamiento de señales. Posteriormente volveremos a ocuparnos de los aspectos del proceso de modelización más relacionados con el aprendizaje de las matemáticas.

## UN PROBLEMA DE OPTIMIZACION DISCRETO

El problema aparece al intentar mejorar la red de interconexión en una red local. Una red local está constituida por varios ordenadores situados a corta distancia ( $< 2 - 3$  km) que se comunican entre sí a alta velocidad ( $> 1$  Mbit/s) y con bajo costo.

Una de las decisiones básicas en el diseño de tales sistemas es la elección de una red de interconexión que sea adecuada para toda una gama de aplicaciones diferentes. Hace unos años se estaban estudiando y utilizando redes en bucle con enlaces unidireccionales (enlaces que permiten la comunicación en un único sentido). Dichas redes permiten usar conexiones punto a punto entre nudos que pueden establecerse físicamente mediante fibras ópticas, lo que permite alcanzar las altas velocidades requeridas.

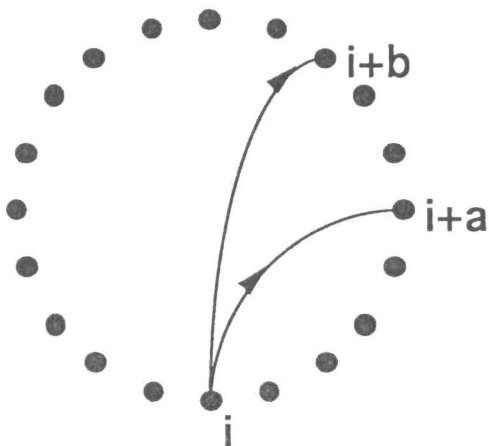
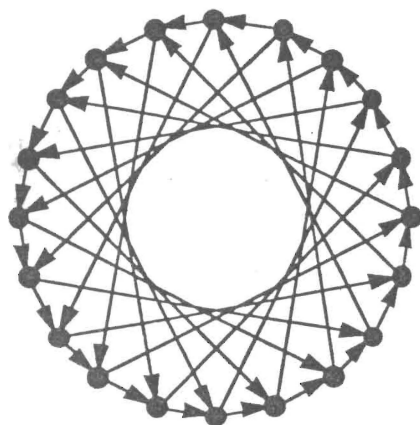
Inicialmente se consideró la red con un sólo bucle, lo que presenta varios inconvenientes. En primer lugar, es poco fiable, pues el fallo de cualquier enlace o interface desconecta la red. Por otra parte, su capacidad es baja pues diferentes comunicaciones deben utilizar los mismos enlaces. Finalmente, algunos mensajes deben recorrer toda la red hasta alcanzar su destino. Las diferentes soluciones propuestas coincidían en duplicar el número de enlaces, de forma que cada ordenador estuviera directamente conectado a otros dos. Pero, ¿cómo establecer los enlaces? Con un doble lazo ya se mejoraba la fiabilidad y capacidad de la red, pero al mismo tiempo se deseaba acortar el recorrido de los mensajes, lo cual además contribuiría a aumentar la capacidad de la red. Por otra parte una estructura simétrica facilitaría el encaminamiento de los mensajes.

### Formulación matemática. El modelo matemático

Veamos el modelo desarrollado en [2]. Por sus características, parece que el problema podría modelarse en términos de grafos dirigidos. Para ello necesitamos un mínimo de terminología.



Un *grafo dirigido* consiste en un conjunto de *vértices* y un conjunto de *arcos*. Cada arco une un vértice  $x$  con otro vértice  $y$ , y se dice entonces que  $x$  es *adyacente* a  $y$ . Un *camino* de *longitud*  $n$  entre dos vértices  $x_0$  y  $x_n$  es una sucesión de vértices  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$  en la que cada vértice es adyacente al siguiente. La longitud del camino más corto entre dos vértices  $x_0$  y  $x_n$  es la *distancia*  $d(x, y)$  y la mayor de éstas es el *diámetro*  $k$  del grafo.



Ahora el problema puede modelarse de la siguiente forma:

*Consideremos un grafo dirigido con  $N$  vértices numerados de 0 a  $N - 1$  en el que cada vértice  $i$  es adyacente a los vértices  $i+a$  e  $i+b$ . Determinar  $a$  y  $b$  para que el diámetro del grafo sea mínimo.*

El requisito de simetría se ha traducido en que cada vértice  $i$  sea adyacente a los vértices  $i+a$  e  $i+b$  donde  $a$  y  $b$  no dependen de  $i$ . Y para acortar el recorrido de los mensajes deseamos minimizar el diámetro, es decir la mayor distancia entre vértices. (En lugar de minimizar el diámetro se puede optar por minimizar la distancia media entre vértices. Lo que sigue también es válido para esta opción).

Una ventaja adicional de esta formulación es que también sirve de modelo para el problema de reordenar vectores  $p$ -ordenados mediante dos conexiones equiespaciadas.

Esquemáticamente, un vector de  $N+1$  componentes está  $p$ -ordenado cuando los elementos correlativos en un vector ordenado están a distancia  $p$  en él. Más precisamente, si  $1 \leq p \leq N$  y  $p$  es relativamente primo con  $N+1$ , un vector de  $N+1$  componentes está  $p$ -ordenado si su componente  $p_i \bmod N+1$  es la componente  $i$ -ésima,  $0 \leq i \leq N-1$ , del vector ordenado. Así, por ejemplo, para  $N=6$  el vector  $(a_0, a_5, a_3, a_1, a_6, a_4, a_2)$  es un vector 3-ordenado. Los vectores  $p$ -ordenados aparecen frecuentemente. Por ejemplo, al almacenar una matriz en los  $N+1$  módulos de memoria de un ordenador es útil almacenar el elemento  $a_{ij}$  en el módulo  $pi + qj \bmod N+1$ , en cuyo caso los vectores fila se recuperan en forma de vectores  $p$ -ordenados mientras que los vectores columna se recuperan en forma de vectores  $q$ -ordenados (tras un desplazamiento cíclico). Normalmente los vectores  $p$ -ordenados

deben ser reordenados antes de realizar cálculos con ellos, lo que puede hacerse mediante transformaciones que envían el contenido del registro  $ki \bmod N + 1$  al registro  $i$ . Cuando se dispone de dos de estas transformaciones, un vector  $p$ -ordenado puede reordenarse si existen enteros  $m$  y  $n$  tales que

$$(k_1)^m (k_2)^n = p.$$

Cuando  $N + 1$  es primo, aparte de otras ventajas, cualquier vector  $p$ -ordenado puede ser reordenado (incluso con una sola transformación) pues los números  $1, 2, 3, \dots, N$  forman un grupo cíclico con la multiplicación módulo  $N + 1$ . En este caso, podemos pasar del grupo anterior al grupo aditivo de los enteros módulo  $N$  mediante cualquier generador  $g$  del grupo multiplicativo. Con

$$k_1 = g^a, \quad k_2 = g^b, \quad p = g^s, \quad 0 \leq a, b, s \leq N - 1$$

la ecuación anterior se convierte en

$$ma + nb = s, \bmod N$$

y para reordenar rápidamente vectores  $p$ -ordenados se debe minimizar  $m + n$  con una adecuada elección de  $a$  y  $b$ . Formulado en términos de grafos dirigidos, el problema matemático es el mismo. De hecho, una generalización natural del modelo matemático en términos de grafos dirigidos de Cayley sirve de modelo a un gran número de problemas.

### Resolución del modelo

Parece difícil encontrar un problema de enunciado más simple. Sin embargo su resolución no lo es. (Naturalmente, para cada  $N$  basta hacer una exploración exhaustiva extendida a todos los valores de  $a$  y  $b$  para obtener la solución óptima para ese valor de  $N$ , pero deseamos determinar la solución para todo  $N$ ). De hecho no se sabe resolver el problema análogo para tres o más enlaces. Esto no sorprenderá tanto a quienes ya se hayan enfrentado alguna vez con problemas discretos.

4b	a+4b			
3b	a+3b	2a+3b		
2b	a+2b	2a+2b	3a+2b	
b	a+b	2a+b	3a+b	4a+b
0	a	2a	3a	4a

5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2

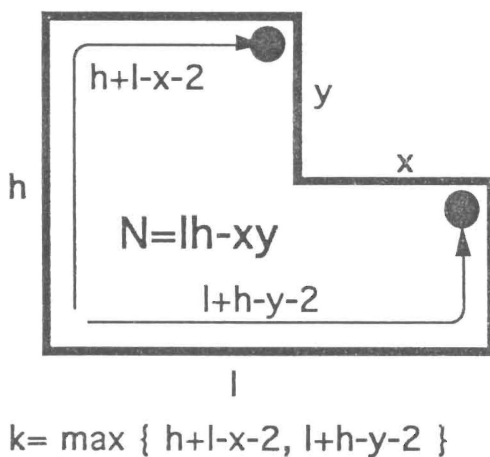
Para su resolución observemos primero que la simetría del grafo permite estudiar sus características desde cualquier vértice. Por comodidad utilizaremos el vértice 0. Por otra parte, es fácil ver que para que desde cada vértice se pueda alcanzar cualquier otro  $a, b$  y  $N$  han de ser primos entre sí:  $\text{m.c.d.}\{a, b, N\} = 1$ . El resto se resume en las tres observaciones siguientes:

A.- Supóngase ahora que se divide el plano en cuadrados unitarios y que, empezando con el 0 en cualquiera de ellos, les asignamos enteros siguiendo la pauta de la figura de la izquierda. Los pasos horizontales corresponden a utilizar arcos  $i \rightarrow i + a$ , mientras que los pasos verticales corresponden a utilizar arcos  $i \rightarrow i + b$ . Así, cada cuadrado contendrá un número del 0 al  $N - 1$  y *la distribución de estos números en el plano se repite periódicamente*. La figura de la derecha presenta el caso  $N = 9, a = 1, b = 7$ .

B.- Considerese ahora una baldosa formada por  $N$  cuadrados numerados del 0 al  $N - 1$ . La citada periodicidad asegura que *esta baldosa tesela o embaldosa* todo el plano.

C.- En este contexto, el problema consistirá ahora en determinar baldosas cuyos correspondientes grafos dirigidos tengan diámetro mínimo. Con este fin a un cuadrado 0 se le asociaran los cuadrados rotulados desde 1 hasta  $N - 1$  correspondientes a los vértices del grafo dirigido situados a menor distancia de él. Resulta que *siempre es posible obtener así una baldosa en forma de L*.

5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2
2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4
4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6
6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1
1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3
3	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5
5	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7
7	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2



En cierta forma, la resolución del problema nos ha conducido a un nuevo problema matemático. Ahora el procedimiento a seguir será:

1.- *Optimización de baldosas*: Para cada  $N$  debe hallarse la baldosa en forma de  $L$  de área  $N$  que minimice el diámetro

$$k = \max \{ h + l - y - 2, l + h - x - 2 \}$$

del correspondiente grafo dirigido.

El estudio muestra que las baldosas óptimas han de tener medidas  $l, h, x, e$  y que satisfagan

$$l = h, \quad y = x, \quad l = 2x.$$

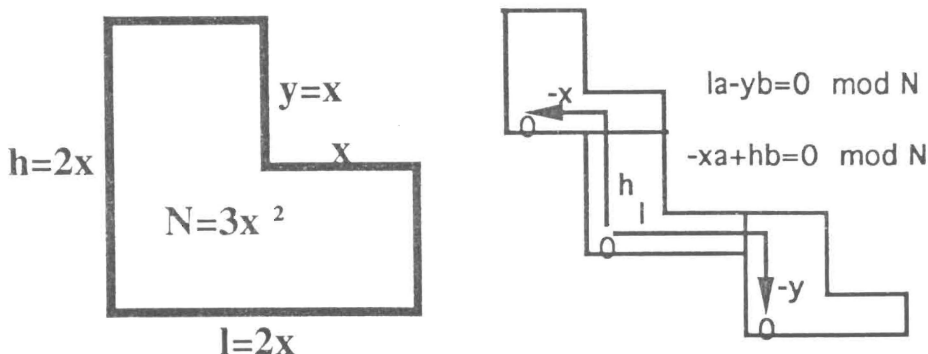
Esto corresponde al caso  $N = 3x^2$ . En general deberemos buscar baldosas cuyas medidas verifican estas igualdades sólo de forma aproximada.

2.- *Construcción de baldosas:* Para cada una de estas baldosas deben determinarse los pasos  $a$  y  $b$  que puedan generarla.

Para poder construir una baldosa dada los pasos  $a$  y  $b$  han de satisfacer

$$\begin{aligned} la - yb &= 0 \pmod{N} \\ -xa + hb &= 0 \pmod{N} \end{aligned}$$

además de la citada condición  $\text{m.c.d.}\{a, b, N\} = 1$ . Esta condición imposibilita la construcción de la baldosa óptima cuando  $N = 3x^2$ .



Escribiendo el sistema anterior en la forma

$$\begin{aligned} la - yb &= \alpha N \\ -xa + hb &= \beta N \end{aligned}$$

se obtiene inmediatamente

$$\begin{aligned} a &= h\alpha + y\beta \pmod{N} \\ b &= x\alpha + l\beta \pmod{N}. \end{aligned}$$

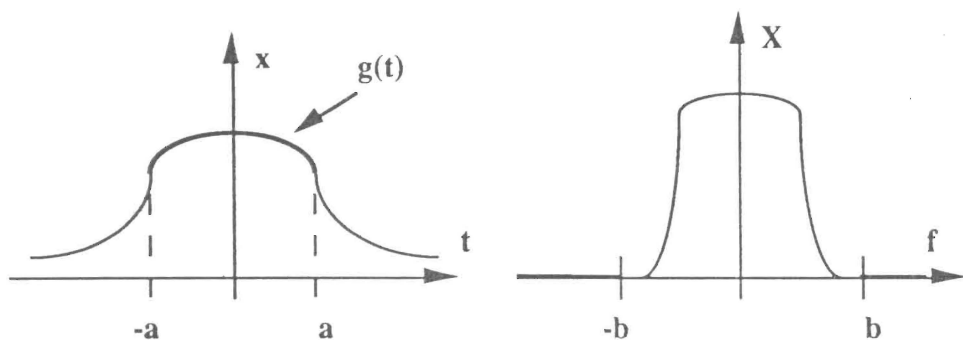
Se obtienen así diferentes valores óptimos de  $a$  y  $b$ . El diámetro de los grafos dirigidos resultantes es un entero "próximo" a  $\sqrt{3N}$ , véase [1].

## EXTRAPOLACION DE FUNCIONES DE BANDA LIMITADA

Un tema muy importante en Teoría de la Señal es el de extrapolación de una función conocida en un intervalo  $[-a, a]$  a fuera de ese intervalo. Mucha gente ha soñado alguna vez con poder obtener la evolución futura del mercado de valores. Naturalmente, ello es imposible sin datos adicionales.

Un caso a destacar es cuando se dispone además de cierta información sobre la Transformada de Fourier de la función, como por ejemplo que se anula fuera de un

cierto intervalo acotado  $[-b, b]$ , lo que en Teoría de la Señal se expresa diciendo que se trata de una función de banda limitada, pues su espectro de frecuencias está limitado a esa banda o intervalo. Ello puede ser interpretado diciendo que la función “no tiene oscilaciones rápidas”. El problema se presenta en el contexto de la recuperación de imágenes en diversas áreas: tomografía, espectrografía, radioastronomía, filtrado de señales, etc.



De hecho el problema ya casi está formulado en términos matemáticos, por lo que el primer paso va a ser completar esa formulación. Para ello necesitamos saber que la transformada de Fourier de una función  $x(t)$  es la función  $X(f)$  dada por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt.$$

Entonces se verifica

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df.$$

Prescindiendo del marco funcional, el problema puede formularse ahora como el de obtención de una función  $x(t)$  en  $(-\infty, \infty)$  a partir de

- i)  $x(t) = g(t), \quad -a \leq t \leq a, \quad a > 0$
- ii)  $X(f) = 0, \quad |f| > b, \quad b > 0$

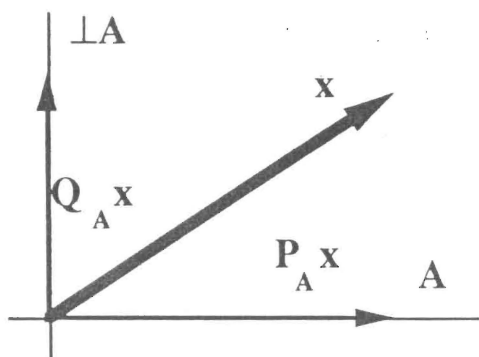
Desde un punto de vista matemático ii) implica que la función  $x$  es analítica, por lo que a partir de i) podrá conocerse para todo  $t$ , por ejemplo mediante un desarrollo en serie de Taylor. Sin embargo este método de resolución no es factible a partir de datos reales, es decir cuando  $x(t)$  es conocida para  $|t| \leq a$  con un cierto margen de error.

### Formulación matemática. El modelo matemático

Vamos a ver una formulación matemática del problema en términos de proyecciones sobre subespacios vectoriales cerrados en un Espacio de Hilbert debida a Youla [7], quien supo extraerla de los trabajos previos de Gerchberg [3] y Papoulis [5].

!No os asustéis! Se puede captar una buena parte de su trabajo con algunos conocimientos de espacios euclídeos, es decir espacios vectoriales de dimensión finita dotados de un producto escalar. En estos espacios se puede hablar de ortogonalidad entre vectores, de proyección ortogonal sobre un subespacio vectorial y de

complemento ortogonal de un subespacio vectorial, que será esencialmente lo que utilizaremos. Bastará saber además que si  $P$  es un operador de proyección sobre un subespacio vectorial se verifica  $P^2 = P$  y que el operador de proyección  $Q$  sobre el complemento ortogonal es  $Q = I - P$ . La figura recuerda estos conceptos en el caso del espacio vectorial  $V = \mathbb{R}^2$ .



$$P_A^2 = P_A$$

$$Q_A + P_A = I$$

Un marco adecuado para la transformación de Fourier lo proporciona el espacio

$$V = L^2(-\infty, \infty) = \{x(t) \mid \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty\},$$

pues entonces  $X(f) \in L^2(-\infty, \infty)$  y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df.$$

En este espacio los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in V \mid x(t) = 0 \text{ c.t.t } |t| > a\} \\ B &= \{x \in V \mid X(f) = 0 \text{ c.t.f } |f| > b\} \end{aligned}$$

son subespacios vectoriales cerrados, por lo que podemos considerar los operadores de proyección sobre estos espacios  $P_A$ ,  $P_B$  y sobre sus complementos ortogonales  $Q_A$ ,  $Q_B$ .

Ahora el problema matemático es

$$\text{Determinar } x \in B \text{ a partir de } g = P_A x.$$

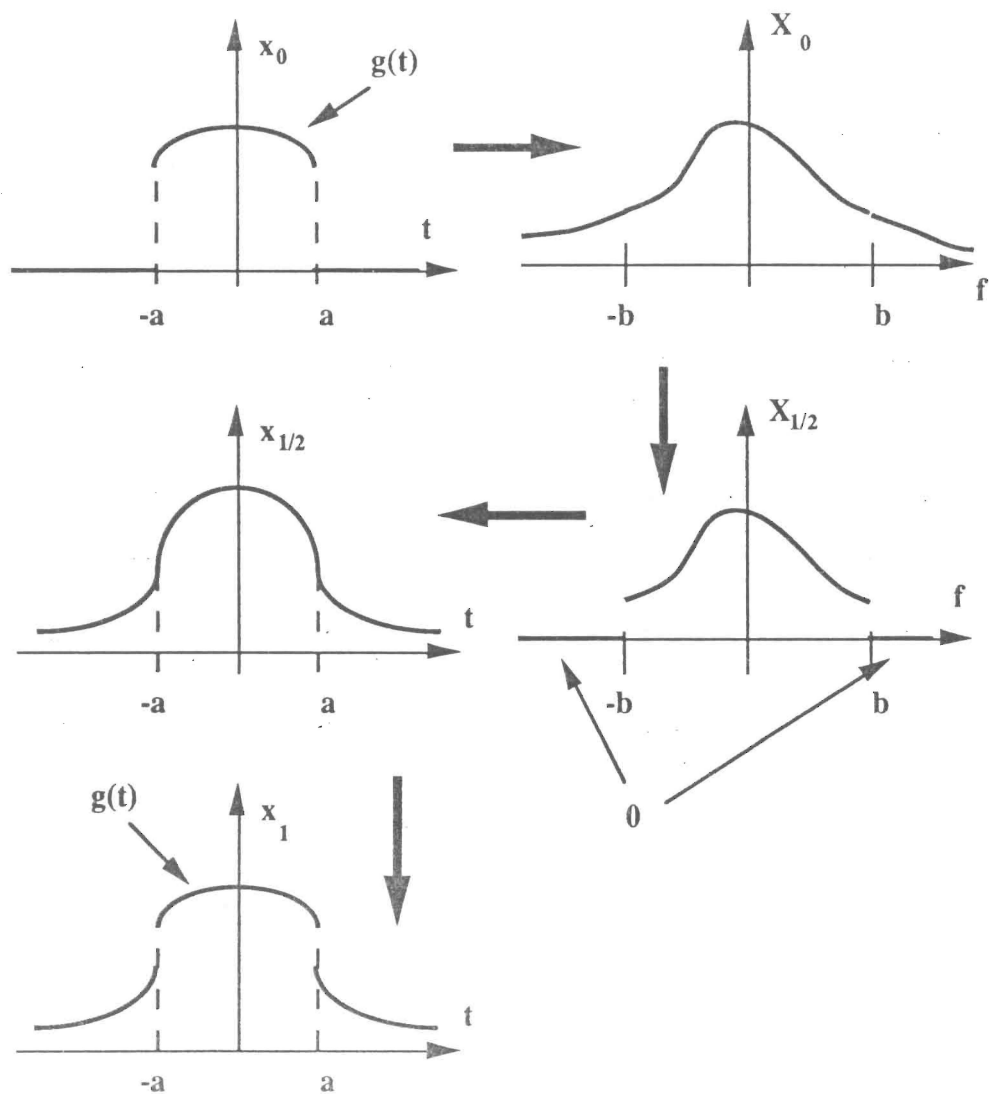
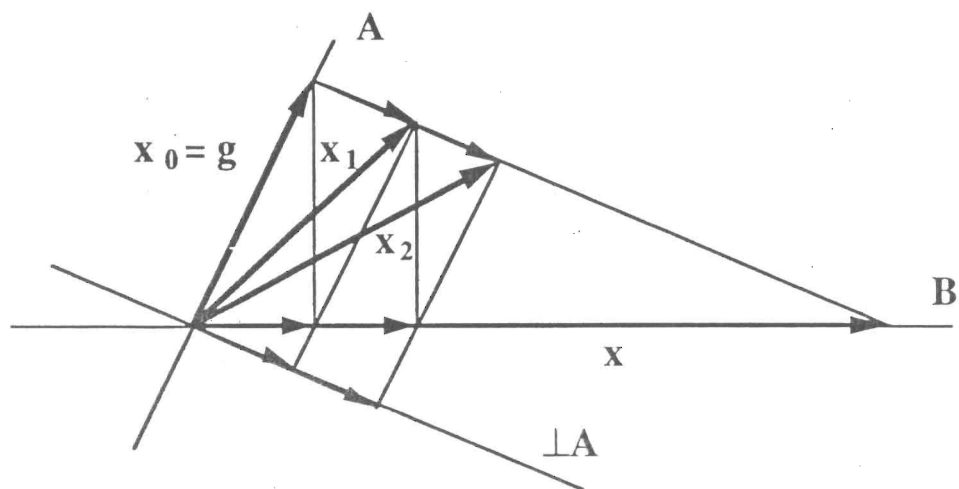
### Resolución del modelo

El cálculo

$$\begin{aligned} g &= P_A x &= P_A P_B x &= (1 - Q_A) P_B x \\ &= P_B x - Q_A P_B x &= x - Q_A P_B x &= (I - Q_A P_B) x \end{aligned}$$

muestra que  $x$  está unívocamente determinado por  $g$  si y solo si el operador  $T = I - Q_A P_B$  tiene inverso. La ecuación

$$x = g + Q_A P_B x$$



sugiere el algoritmo

$$x_0 = g, \quad x_n = g + Q_A P_B x_{n-1}, \quad n \geq 1$$

cuya interpretación geométrica se muestra en la figura y que no es otra cosa que el propuesto por Papoulis continuando un trabajo de Gerchberg. Empezando con

$$x_0(t) = \begin{cases} g(t), & |t| < a \\ 0, & |t| > a \end{cases}$$

se construye  $x_n(t)$  a partir de  $x_{n-1}(t)$  en la forma

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & |t| < a \\ \int_{-a}^a X_{n-1}(f) e^{i2\pi ft} df, & |t| > a \end{cases}$$

Es fácil ver que

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_{n-1}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) - X_{n-1}(f)|^2 df \\ &> \int_{-\infty}^{\infty} |X(f) - X_{n-1/2}(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_{n-1/2}(t)|^2 dt \\ &> \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - x_n(t)|^2 dt = E_n^2 \end{aligned}$$

es decir, el uso de la información disponible sobre la función hace que el error (cuadrático medio) se reduzca dos veces en cada iteración. Es más, se demuestra que  $E_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Sin embargo, este resultado ya no es cierto "en presencia de ruido", es decir cuando en lugar de  $i$ ) se tiene

$$i') \quad |x(t) - g(t)| < \epsilon (> 0) \quad -a \leq t \leq a \quad a > 0.$$

¿Dónde está la dificultad? ¿Es estable el algoritmo? ¿Está bien condicionado el problema? Aquí nos limitaremos a dar el resultado principal de Youla y su aplicación al problema de partida.

Sean  $A$  y  $B$  dos subespacios vectoriales cerrados de un espacio de Hilbert  $V$  y  $P_A, P_B, Q_A, Q_B$  los correspondientes operadores de proyección sobre  $A, B$  y sus complementos ortogonales  $\perp A$  y  $\perp B$ , respectivamente. Entonces

a)  $x$  está unívocamente determinado por su proyección  $g = P_A x$  si y solo si

$$B \cap (\perp A) = \{\phi\}.$$

b) El problema de reconstruir  $x$  a partir de  $g = P_A x$  está bien condicionado si y solo si

$$\text{ang}(P_B, \perp P_A) > 0$$

lo que se satisface si y solo si

$$\|Q_A P_B\| < 1.$$

c) Si  $B \cap (\perp A) = \{\phi\}$  la sucesión  $\{x_n\}$  generada por el algoritmo

$$x_0 = g, \quad x_n = g + Q_A P_B x_{n-1}, \quad n \geq 1$$

converge a  $x$ .



Conviene observar el carácter general del resultado anterior. En el caso particular de extrapolación de funciones de banda limitada se verifica

$$B \cap (\perp A) = \{\phi\},$$

$$\text{ang}(P_B, \perp P_A) = 0,$$

por lo que aunque  $x$  está unívocamente determinada por sus valores en el intervalo  $[-a, a]$  el problema está mal condicionado. En otras palabras,  $T^{-1}$  no es un operador acotado. Más exactamente, dado  $g$  existe una sucesión  $x_n$  tal que

$$\|Tx_n - g\| \rightarrow 0 \text{ pero } \|x_n\| \rightarrow \infty.$$

Sin embargo, los resultados anteriores han clarificado la situación del problema y han permitido mejorar los algoritmos anteriormente conocidos gracias a diversas técnicas (métodos de regularización de problemas mal condicionados, aceleración de la convergencia del algoritmo de proyecciones, etc.), así como extender el estudio a otros problemas de extrapolación [6,8].

Antes de acabar me gustaría hacer algunas consideraciones sobre el proceso de modelización matemática y sus implicaciones en la enseñanza dentro de unos estudios de Matemática Aplicada. A menudo se considera que el objetivo de la formación matemática es exclusivamente la preparación para afrontar la etapa de resolución matemática. Nunca se insistirá suficientemente en la conveniencia, si no es necesidad, de contemplar globalmente todo el proceso. Es cierto que ello es difícil en muchos casos, que exige del profesorado introducirse en terrenos poco conocidos y menos seguros, que frecuentemente hay que "mancharse las manos" aprendiendo a despreciar unos términos frente a otros y que la estructuración de los conocimientos matemáticos aconseja su enseñanza en bloques bien definidos y adecuadamente ordenados. Pero también es cierto que, limitándose a la etapa de resolución matemática, renunciamos a conocer una parte fundamental de los objetivos de ésta, renunciamos también a las aportaciones que proceden del problema original y con ello reducimos el papel que siempre juega la intuición en la creación científica. Por ello, recomendaría la inclusión en la enseñanza del tratamiento completo de cuantos problemas de la realidad sean posibles. Parece oportuno recordar aquí las palabras de Poincaré:

*"Si vous assistez à une partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche de pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraiment bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de Mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est tout autre chose; c'est savoir pourquoi le joueur avance tel pièce plutôt que tel autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. A plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au jouer lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur."*

*H. Poincaré, La valeur de la Science.*

Quiero acabar expresando mi deseo de que los años de estudio que os esperan os conviertan en buenos jugadores, mi deseo de que aprendáis no sólo las reglas del

movimiento de las piezas sino, sobre todo, las razones para elegir una determinada jugada entre todas las correctas.

## Referencias

- [1] P. Esqué, F. Aguiló and M. A. Fiol, "Double commutative-step digraphs with minimum diameters", *Discrete Math.* 114, (1993) 101-105.
- [2] M. A. Fiol, J. L. A. Yebra, I. Alegre and M. Valero, "A discrete optimization problem in local networks and data alignment", *IEEE Trans. on Computers*, C-36 (1987), 702-713.
- [3] Gerchberg
- [4] W. J. Meyer, *Concepts of Mathematical Modeling*, McGraw-Hill, 1984.
- [5] A. Papoulis, "A new algorithm in spectral analysis and bandlimited extrapolation", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS-22 (Sept. 1975), 735-742.
- [6] M. I. Sezan and H. Stark, "Image restoration by the method of convex projections: Applications and numerical results", *IEEE Trans. on Medical Imaging*, MI-1(Oct. 1982), 95-101.
- [7] D. C. Youla, "Generalized image restoration by the method of alternating orthogonal projections", *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS-25 (Sept. 1978), 694-702.
- [8] D. C. Youla and H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections: Theory", *IEEE Trans. on Medical Imaging*, MI-1(Oct. 1982), 81-94.